



TITLE:

$SL_2(\mathbf{Z})$ とその部分群に対するLaplacianの隣接固有値の比の評価 (代数群上の保型形式・保型表現と保型的 L 関数)

AUTHOR(S):

知念, 宏司

CITATION:

知念, 宏司. $SL_2(\mathbf{Z})$ とその部分群に対するLaplacianの隣接固有値の比の評価 (代数群上の保型形式・保型表現と保型的 L 関数). 数理解析研究所講究録 2000, 1173: 72-81

ISSUE DATE:

2000-10

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/64448>

RIGHT:

$SL_2(\mathbf{Z})$ とその部分群に対する Laplacian の隣接固有値の比の評価

大阪府立大学総合科学部

知念 宏司 (Koji Chinen)*

1 Introduction

\mathbf{R}^2 の場合

まず \mathbf{R}^2 の場合に, 次のような問題がある: $\Delta_E = -(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)$, Ω を \mathbf{R}^2 の有界領域 (「領域」= 区分的に滑らかな境界をもつ連結開集合) とし, Dirichlet 問題

$$\begin{cases} \Delta_E u = \lambda u, & \text{in } \Omega, \\ u = 0, & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

の固有値を

$$(0 <) \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$$

とする. これらの固有値について, その隣接するものの比 λ_{n+1}/λ_n を上から評価する, という問題である. これは 1956 年, Payne-Pólya-Weinberger [14] で初めて提起され, その中で

定理 1.1 $\forall n \geq 1, \forall \Omega : \text{bdd.}$ に対して

$$\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \leq 3.$$

が示され, さらに

予想 1.2 (PPW Conjecture) $\forall \Omega \in \mathbf{R}^2, \text{bdd.}$ に対して

$$\left. \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|_{\Omega} \leq \left. \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|_{\text{disc}} = 2.539\dots$$

ただし, $\left. \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|_{\text{disc}}$ は Ω が円のときの比を表す. また, 等号は Ω が円のときに限られる.

が述べられている. これは 1991 年に Ashbaugh-Benguria [2] によって肯定的に解決された. また, 2.539... という値は, Bessel 関数 $J_n(x)$ の零点で書けることもわかった.

これらの問題の motivation

1° Universal inequality.

領域 Ω の形, 大きさに関係なく成り立つ, 固有値の間の不等式を universal inequality という. これは, どのような数列が Δ_E の固有値になり得るか, というところから発せられた問いである. 定理 1.1 は, 固有値になり得る正数列はかなり限られることを示している.

* E-mail: YHK03302@nifty.ne.jp

2° 等スペクトル問題.

つまり同じ固有値 $(\lambda_n)_{n \in \mathbf{N}}$ をもつ 2 つの領域 Ω_1, Ω_2 があつたとき, $\Omega_1 = \Omega_2$ となるか, という問題である. これは 1966 年の Kac [10] で提起されて以来, 多くの研究がある. 予想 1.2 は, 固有値のうち, 最初の 2 つがわかれば, 領域が円かどうかの判定はできることを示している. もっとも, 長年未解決であつた \mathbf{R}^2 の等スペクトル問題も 1992 年, Gordon-Webb-Wolpert [5] によって否定的に解決された (i.e. 同じスペクトル $(\lambda_n)_{n \in \mathbf{N}}$ をもち, 形の異なる 2 つの領域の存在が示された).

数論的な場合への類似

こういった問題の「数論的類似」を考えてみようというのが目標である. つまり, Δ_E を $\Delta = -y^2(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)$ で, \mathbf{R}^2 を上半平面 H で, Ω を基本領域 $\Gamma \backslash H$ (Γ : 第 1 種 Fuchs 群) でおきかえる. すると固有関数はいわゆる Maass waveform となる:

定義 1.3 $f: H \rightarrow \mathbf{C}$ が Γ に対する Maass waveform であるとは,

- (i) $\Delta f(z) = \lambda f(z)$ ($\exists \lambda \in \mathbf{C}$);
- (ii) $f(\gamma z) = f(z)$ ($\forall \gamma \in \Gamma$);
- (iii) $f(z)$ は Γ の cusp の近傍で高々多項式オーダーが成り立つこと.

また, $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = 0$ (a : Γ の cusp) のとき, $f(z)$ を cusp form という. Cusp form が存在すれば, cusp forms の列 $(u_j(z))_{j \geq 1}$ で, $\Delta u_j(z) = \lambda_j u_j(z)$,

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots, \lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_j = \infty$$

となるものがとれる. このような固有値に関しては,

予想 1.4 (Selberg の固有値予想) Γ : 合同部分群なら $\lambda_1 \geq 1/4$.

予想 1.5 (Phillips-Sarnak) Γ : 数論的でない $\Rightarrow \{\text{cusp forms}\} = \{0\}$.

などの問題がある. Maass waveform についてより詳しくは, Hejhal [6], Iwaniec [8], [9], Kubota [11], Terras [20]などを参照. 以後, Γ としては

$$(*) \quad \Gamma \subset SL_2(\mathbf{Z}) \text{ かつ } \Delta \text{ が } \Gamma \text{ に対し無限個の固有値をもつ}$$

をみたすものをとる. そして次の問題を考える:

問題 1.6 Γ に対する Δ の第 j 固有値 λ_j について λ_{j+1}/λ_j を上から評価せよ.

Motivation についてちょっと補足

我々は数論的な場合ということで基本領域を考えていて, H の任意の領域を考えてはいないので, \mathbf{R}^2 の場合の完全な analogy ではないが, H の場合にこの問題を持ち込んだ動機

について少し述べておく. それは, \mathbf{R}^2 における円という領域の特殊性である. \mathbf{R}^2 の場合, Ω の面積が大きいほど λ_1 は小さくなることを我々は経験的に知っているが (大きな太鼓ほど低い音が出る), λ_1 を決めるのは Ω の面積だけでなく, 形も重要である. 例えば Ω が辺の長さ πa と πb の長方形なら, $\lambda_1 = 1/a^2 + 1/b^2$ となるから, a を固定すれば, いくら b を大きくしても λ_1 は $1/a^2$ 以下にはなり得ない. 一般に $\text{vol}(\Omega)$: 一定なら

$$\lambda_1|_{\Omega} \geq \lambda_1|_{\text{disc}}$$

(Faber-Krahn の定理) であり, また, Ω に含まれる最も大きな円の半径を r_{Ω} とすると,

$$\lambda_1 \geq \frac{1}{4r_{\Omega}^2}$$

(Osseman [12]) などが知られている. このように, 円という領域はある意味で λ_1 の下限を決定づける. そして, PPW Conjecture によれば, 比 λ_2/λ_1 はその円という領域を特徴づけていることがわかる. H の場合に λ_1 の下限を問題にするのが Selberg 予想であるから, Δ の固有値の比にも何らかの意味があるのではないか, というのが, 当初の動機である. なお, Δ_E の固有値に関する種々の結果については, Payne-Pólya-Weinberger [14] のほか, Arnol'd et al [1], Osseman [13], Protter [16], Yau [21] などを参照.

本日の結果

特殊な領域に対しては固有関数が具体的にわかる Euclid の場合とは異なり, 我々の場合は種々の困難が伴うが,

1° $\lambda_j \geq \exists X_0$ なるすべての λ_j に対して $\lambda_{j+1}/\lambda_j \leq M$ (for $\exists M > 0$).

2° 残る有限個の $\lambda_j (< X_0)$ に対しては λ_j の数値計算を利用して λ_{j+1}/λ_j の最大値を求める.

という結果を目標とする. 1° の部分は (*) を満たすすべての Γ に対して成り立つ評価を, Selberg 跡公式を用いて導く. 2° については, Hejhal [7] の $SL_2(\mathbf{Z})$ に対する計算結果を利用する. 2° の部分は $SL_2(\mathbf{Z})$ のみに対する結果となる. 本日の主結果は次の通り:

定理 1.7 Γ は (*) を満たす $SL_2(\mathbf{Z})$ の任意の部分群とし, Γ に対する Δ の第 j 固有値を λ_j とすると, $\lambda_j \geq 677$ なるすべての λ_j に対して

$$\frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j} \leq \frac{8}{5}.$$

右辺の値 $8/5$ は, $SL_2(\mathbf{Z})$ に対する λ_{j+1}/λ_j の, $\lambda_j < 677$ のときの最大値 $\lambda_2/\lambda_1 = 1.628\dots$ と比較して設定したものである (小さい固有値の具体的な値については参考文献のあとの表を参照). さらに,

定理 1.8 $SL_2(\mathbf{Z})$ に対する Δ の第 j 固有値を λ_j とすると, すべての $j \geq 1$ に対して

$$\frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j} \leq \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 1.628\dots$$

もちろん, 定理 1.7 が主結果のうち本質的な部分である. 前述の通り, Selberg 跡公式を用いて証明するのだが, 計算そのものは相当厄介ではあるものの, その一つ一つは初等的なので, 具体的な計算は Chinen [3] をご覧頂くことにして, 以下では証明のアイデアを中心に述べたいと思う.

2 証明の方針

Selberg 跡公式と隣接固有値

以下, 定理 1.7 の証明である. 我々は条件 (*) を満たすすべての Γ を問題にしているが, 実際の計算は $SL_2(\mathbf{Z})$ に対してのみ行えば十分である. それは, $SL_2(\mathbf{Z})$ に対する固有関数は部分群に対する固有関数でもあり, この意味で, より小さな部分群を考えれば固有関数は増える. 言い換えれば, 固有値の間隔はより詰まっていくためである. $SL_2(\mathbf{Z})$ に対する Selberg 跡公式 は次のようである:

定理 2.1 (The Selberg trace formula for $SL_2(\mathbf{Z})$) 関数 $h(r)$ は次の条件を満たすとすする:

$$\begin{cases} h(r) \text{ は帯状領域 } |\operatorname{Im} r| \leq \frac{1}{2} + \varepsilon \text{ で正則 (for some } \varepsilon > 0); \\ h(r) \text{ は偶関数;} \\ \text{上の帯状領域で } h(r) \ll (|r| + 1)^{-2-\varepsilon}. \end{cases} \quad (2.1)$$

また $h(r)$ の Fourier 変換を

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(r) e^{irt} dr \quad (2.2)$$

で定義する. さらに $j \geq 1$ に対して, r_j を $\lambda_j = 1/4 + r_j^2$ を満たす正の数とする. このとき次が成り立つ:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} h(r_j) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(r) \frac{\varphi'}{\varphi} \left(\frac{1}{2} + ir \right) dr + \frac{1}{12} \int_{-\infty}^{\infty} r \tanh(\pi r) h(r) dr \\ &+ \sum_P \sum_{l=1}^{\infty} \frac{g(l \log p) \log p}{p^{\frac{l}{2}} - p^{-\frac{l}{2}}} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(r)}{\cosh(\pi r)} \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{3\sqrt{3}} \cosh \frac{\pi r}{3} \right) dr \\ &+ \frac{1}{4} h(0) \left(1 - \varphi \left(\frac{1}{2} \right) \right) - g(0) \log 2 - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(r) \psi(1 + ir) dr, \end{aligned} \quad (2.3)$$

ここで

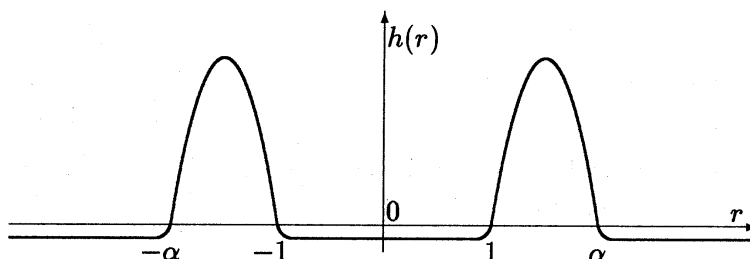
$$\varphi(s) = \pi^{2s-1} \frac{\Gamma(1-s)\zeta(2-2s)}{\Gamma(s)\zeta(2s)},$$

$\psi(s)$ は Gamma 関数の対数微分:

$$\psi(s) = \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = -\gamma - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+s} - \frac{1}{n+1} \right) \quad (\gamma: \text{Euler's constant}),$$

和 \sum_P は $SL_2(\mathbf{Z})$ の原始的双曲的共役類にわたる和であり, p は共役類 P のノルム, すなわち $\gamma \in P$ に対して $g \in SL_2(\mathbf{R})$ があつて $g^{-1}\gamma g = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ ($a > 1$) となるとき, $p = a^2$. すべての積分, 級数は絶対収束する.

一般に, Selberg 跡公式の利用法としては, 問題に適する $h(r)$ を選んで右辺を評価することにより固有値に関する量 (= 左辺) を知り, 必要な情報を引き出す, という手順になる. $h(r)$ はテスト関数と呼ばれる. 我々は $h(r)$ として (2.1) を満たし, 下のようなグラフをもつものをとる ($\alpha > 1$):



山の部分はできるだけ高い方がよく, $1 \leq |r| \leq \alpha$ 以外ではつねに負, そして負の部分はできるだけ座標軸に近い方がよい. また $r \rightarrow \infty$ のとき, $h(r) \rightarrow 0$ となる. この $h(r)$ に対して

主張 2.2 ある $X_0 > 0$ があり, $X \geq X_0$ なる任意の X に対し,

$$\sum_{j=1}^{\infty} h(r_j/X) \geq \max_{r \in \mathbf{R}} h(r).$$

が言えたとする. すると, $1 \leq r_j/X \leq r_{j+1}/X \leq \alpha$ なる r_j, r_{j+1} が存在し, $Y = X^2 + 1/4$ とおけば $Y \leq \lambda_j \leq \lambda_{j+1} \leq \alpha^2 Y + (1 - \alpha^2)/4 \leq \alpha^2 Y$ となり, これから $\lambda_{j+1}/\lambda_j \leq \alpha^2$ が言えて比の評価ができる.

テスト関数の構成

関数 $h(r)$ は, 具体的には次のようにして作る:

$$h(r) = h_+(r) - h_-(r),$$

$$h_+(r) = e^{-A(r-c)^2} + e^{-A(r+c)^2}, \quad h_-(r) = K e^{-B r^2},$$

各定数は

$$A = a \log k, \quad B = \log k, \quad K = k(k^{-a(1-c)^2} + k^{-a(1+c)^2})$$

とし, 最終的に

$$a = 500, \quad c = 1.13, \quad k = 1.6$$

と決めた. なお, 最終ページ (文献表の次) には, $a = 300, 400, 500$ に対する数値計算例 (グラフ) を載せてある. 大きい方の零点 α については $\alpha < (2ac - a + 1)/(a - 1)$ が成り立つので, この値を α のかわりに用いる. 上記の a, c, k に対して $\alpha^2 < 398161/249001 \approx 1.599 < 1.6$ となり, 固有値の比を 1.6 で押えることが可能になる. あとは跡公式右辺 (いわゆる geometric trace) を具体的に評価すればよい. そして結論としては $X_0 = 26$ に対して主張 2.2 が成り立つことが数値的にわかり, 定理 1.7 が出る.

困難な点

通常, Selberg 跡公式を応用する場合, 漸近的な式を導くことが目標である場合が多い. しかし我々の問題では, すでに見た通り, 言わば 2 つの trace の差を下から具体的な数値で評価してやる必要があり, 漸近公式では不十分である. つまり, geometric trace の評価において, 小さな項ももれなく拾ってやらねばならない. その場合問題となるのが双曲的共役類の寄与である. 一般の群に対しては双曲的共役類の挙動を知ることは難しく, 正確に評価するのは不可能である. しかし, 幸い我々は $SL_2(\mathbf{Z})$ だけを相手にすればよいのであり, その場合には実 2 次体の単数および類数に関する Gauss-Siegel の定理を用いることにより, 双曲的共役類の挙動をかなり詳しく知ることができる. これについて, 節をあらためて述べよう.

3 双曲的共役類について

双曲的共役類

Selberg 跡公式における双曲的共役類の寄与は, パラメータ X を含む形 (すなわち $h(r/X)$ に対する跡公式において) では

$$X \sum_P \sum_{l=1}^{\infty} \frac{g(lX \log p) \log p}{p^{\frac{l}{2}} - p^{-\frac{l}{2}}} \quad (3.1)$$

である. 以下, 各項の説明と, 評価を Gauss-Siegel の定理に持ち込む方法について述べる. $\gamma \in \Gamma := SL_2(\mathbf{Z})$, $g \in G := SL_2(\mathbf{R})$ とする.

定義 3.1 (i) γ : 双曲的 $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} |\text{tr } \gamma| > 2 \Leftrightarrow g^{-1}\gamma g = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \quad (\exists a > 1)$.

(ii) $N\gamma := a^2$ を γ の norm という.

a は実 2 次体の単数であることが容易にわかり, また G における双曲的共役類の代表系が $\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}; a > 1 \right\}$ であることから, 各 γ に対して $N\gamma$ が決まる. さらに共役類 $P = [\gamma] = \{\tau^{-1}\gamma\tau; \tau \in \Gamma\}$ について $N\gamma = N\gamma' \quad (\forall \gamma' \in P)$ なので, norm は各共役類に対して定まる値であることがわかる. その意味で, $NP = N\gamma$ を P の norm という.

定義 3.2 $P = [\gamma]$ が原始的 $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \gamma = \gamma_0^l \quad (l > 1)$ なる双曲元 $\gamma_0 \in \Gamma$ が存在しない.

一般に $\gamma = \gamma_0^l$ のとき, $NP = NP_0^l$ ($P = [\gamma]$, $P_0 = [\gamma_0]$). よって, (3.1) において, P と l の両方を動かすことで, すべての双曲的共役類にわたる和を得ている.

Gauss-Siegel の定理

原始的双曲的共役類と実 2 次体の単数との関連を述べよう.

$$D = \{d \in \mathbf{N} ; d \equiv 0, 1 \pmod{4}, d : \text{not a square}\},$$

$h(d)$: 判別式 d をもつ原始的 2 元 2 次形式の狭義の類数,

$$\varepsilon_d = (x_0 + \sqrt{d}y_0)/2 \quad ((x_0, y_0) : x^2 - dy^2 = 4 \text{ の基本解})$$

とする. このとき,

定理 3.3 (Sarnak)

$$\{NP; P : \text{原始的双曲的}\} = \{\varepsilon_d^2; d \in D\},$$

ただし, NP の重複度は $h(d)$ (i.e. $h(d)$ 個の P が同じノルム ε_d^2 をもつ).

これは Sarnak [17] による. この定理により, (3.1) は

$$2X \sum_{d \in D} h(d) \log \varepsilon_d \sum_{l=1}^{\infty} \frac{g(2lX \log \varepsilon_d)}{\varepsilon_d^l - \varepsilon_d^{-l}}$$

と書き換えられる. なお, この書き換えによって和の順序が入れ替わっているが(もともとは共役類のノルムの順 = 単数の大きさの順だが, 判別式の大きさの順に変わっている), 評価しようとしている級数は絶対収束だから問題はない. この評価に Gauss-Siegel の定理

$$\sum_{\substack{d \in D \\ d \leq x}} h(d) \log \varepsilon_d = \frac{\pi^2 x^{3/2}}{18\zeta(3)} + O(x \log x). \quad (x \rightarrow \infty) \quad (3.2)$$

を用いる. これは普通上記のような漸近公式の形で述べられるが, Siegel の証明 ([19]) は, 本質的には指標和に対する Pólya-Vinogradov の不等式

$$\left| \sum_{k=1}^n \chi(k) \right| < cq^{1/2} \log q \quad (n = 1, 2, \dots)$$

(ただし $\chi(k)$: non-principal, mod q) に基づくものであり, この不等式の定数 c は具体的に決められる. 実際, $c = 2$ でよい (Davenport [4, Chapter 23]). このことから Gauss-Siegel の定理の implied constant は明示することができ, 我々の証明に使えるのである:

定理 3.4 (Gauss-Siegel) $r = 0, 1$ に対して

$$\sigma_x^r = \sum_{\substack{d \in D \\ d \leq x \\ d \equiv r \pmod{4}}} h(d) \log \varepsilon_d$$

とすると, $x \geq 12$ に対し,

$$\sigma_x^r \leq \alpha_r x^{\frac{3}{2}} + \beta_r x \log x + \gamma_r \quad (3.3)$$

ただし

$$\begin{cases} \alpha_0 = \frac{\pi^2}{42\zeta(3)}, \alpha_1 = \frac{2\pi^2}{63\zeta(3)}, \\ \beta_0 = \beta_1 = 3 \left(\frac{\sqrt{6} \log 3}{2 \log 2} + \frac{17}{4} \right), \\ \gamma_0 = 0, \gamma_1 = \frac{201}{100}. \end{cases}$$

なお, Gauss-Siegel の定理についてはより詳しい式 (いわゆる新谷公式, Shintani [18]) が知られているが, 双曲的共役類の寄与はもともと小さく, 上記で十分である. あとは $\varepsilon_d \geq \sqrt{d}$ (容易にわかる) と Abel の変形によればよい.

参考文献

- [1] Arnol'd, V. I. et al: Some unsolved problems in the theory of differential equations and mathematical physics. Russian Math. Surveys **44:4** (1989), 157-171
- [2] Ashbaugh, M. S., Benguria, R. D.: Proof of Payne-Pólya-Weinberger conjecture. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **25:1** (1991), 19-29
- [3] Chinen, K.: A bound for the ratio of consecutive eigenvalues of the hyperbolic Laplacian for modular groups. To appear in Forum Math.
- [4] Davenport, H.: Multiplicative Number Theory. Second Edition, Springer-Verlag, 1980
- [5] Gordon, C., Webb, D. and Wolpert, S.: Isospectral plane domains and surfaces via Riemannian orbifolds, Invent. Math. **110** (1992), 1-22
- [6] Hejhal, D. A.: The Selberg Trace Formula for $PSL(2, \mathbf{R})$ Vol. 2. Lecture Notes in Math. **1001**, Springer-Verlag, 1983
- [7] _____: Eigenvalues of the Laplacian for Hecke Triangle groups. Mem. of Amer. Math. Soc. No. 469 (1992)
- [8] Iwaniec, H.: Non-holomorphic modular forms and their applications. In: Modular Forms, pp. 157-196, Ellis Horwood Series of Halsted Press, 1984
- [9] _____: Introduction to the Spectral Theory of Automorphic Forms. Biblioteca de la Revista Matemática Iberoamericana, 1995
- [10] Kac, M.: Can one hear the shape of a drum? Amer. Math. Monthly, **73** (1966), 1-23
- [11] Kubota, T.: Elementary Theory of Eisenstein Series. John Wiley and Sons, 1973
- [12] Osserman, R.: A note on Hayman's theorem on the bass note of a drum. Comm. Math. Helvetici, **52** (1977), 545-555

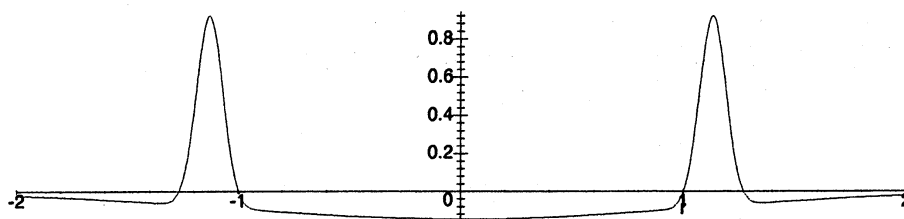
- [13] ———: The isoperimetric inequality. *Bull. Amer. Math. Soc.* **84-6** (1978), 1182-1238
- [14] Payne, L. E., Pólya, G., Weinberger, H. F.: On the ratio of consecutive eigenvalues. *J. Math. and Phys.* **35** (1956), 289-298
- [15] Phillips, R. S., Sarnak, P.: On cusp forms for cofinite subgroups of $PSL(2, \mathbf{R})$. *Invent. Math.* **80** (1985), 339-364
- [16] Protter, M.H.: Can one hear the shape of a drum? revisited. *SIAM Review* **29-2** (1987), 185-197
- [17] Sarnak, P.: Class numbers of indefinite binary quadratic forms. *J. Number Theory* **15** (1982), 229-247
- [18] Shintani, T.: On zeta-functions associated with the vector space of quadratic forms. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo* **22** (1975), 25-65
- [19] Siegel, C. L.: The average measure of quadratic forms with given determinant and signature. *Ann. of Math.* **45** (1944), 667-685
- [20] Terras, A.: *Harmonic Analysis on Symmetric Spaces and Applications I*. Springer Verlag, 1985
- [21] Yau, S.-T.: Problem section, in *Seminar on Differential Geometry*. *Ann. Math. Studies* **102**, 669-706, Princeton University Press, 1982

$SL_2(\mathbf{Z})$ に対する Δ の固有値 (Hejhal [7] による)

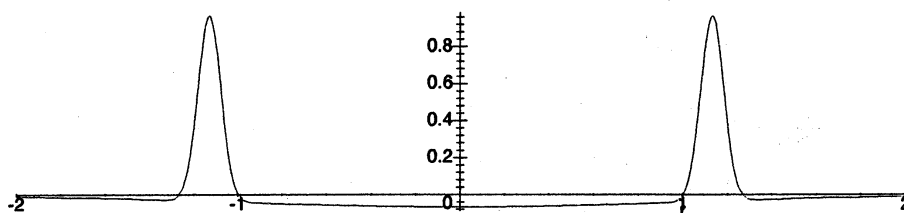
j	λ_j	λ_{j+1}/λ_j	j	λ_j	λ_{j+1}/λ_j
1	91.14134035	1.628592725	12	454.6131591	1.015368613
2	148.4321238	1.280932542	13	461.5999326	1.067707162
3	190.1315376	1.085652508	14	492.8535540	1.053959426
4	206.4167807	1.262917672	15	519.4476490	1.036783548
5	260.6874002	1.063654620	16	538.5547763	1.005376463
6	277.2813577	1.135693434	17	541.4502960	1.074254777
7	314.9066173	1.050456742	18	581.6555672	1.025645613
8	330.7957793	1.141252815	19	596.5724807	1.052337070
9	377.5216142	1.006310806	20	627.7953362	1.062838222
10	379.9040797	1.064819267	21	667.2448791	1.017936588
11	404.5291838	1.123808065	22	679.2129757	-

テスト関数 数値例

$a := 300$
 $c := 1.13$
 $k := 1.6$
 $A := 141.0010888$
 $B := .4700036292$
 $K := .1476493946$



$a := 400$
 $c := 1.13$
 $k := 1.6$
 $A := 188.0014517$
 $B := .4700036292$
 $K := .06672197605$



$a := 500$
 $c := 1.13$
 $k := 1.6$
 $A := 235.0018146$
 $B := .4700036292$
 $K := .03015130606$

